

Wzory na całki nieoznaczone

Tablica wzorów wraz z przykładami

Wzory podstawowe, wersje rozszerzone oraz przykłady zastosowania

Delta Kwadrat

Tomasz Suchta • Filip Dynakowski

Więcej materiałów z matematyki

Zadania, wzory, rozwiązania krok po kroku i materiały do nauki:

deltakwadrat.pl

Spis treści

Wzory

1. Wzór ogólny.....	2
2. Funkcja wykładnicza.....	2
3. Funkcje trygonometryczne.....	2
4. Funkcje wymierne.....	3
5. Całki z wyrażeniami pod pierwiastkiem.....	3
6. Funkcje hiperboliczne.....	3

Przykłady

1. Wzór ogólny.....	4
2. Funkcja wykładnicza.....	4
3. Funkcje trygonometryczne.....	5
4. Funkcje wymierne.....	7
5. Całki z wyrażeniami pod pierwiastkiem.....	8
6. Funkcje hiperboliczne.....	9

1 Tablica wzorów

Wzór podstawowy

argument x

Wersja rozszerzona

argument $ax + b$

Kliknij numer po prawej stronie wzoru, aby przejść do odpowiadających mu przykładów.

Wzór ogólny

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad (1)$$

Funkcja wykładnicza

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C \quad (2)$$

Funkcje trygonometryczne

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C \quad (3)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C \quad (4)$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{tg}(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax + b)| + C \quad (5)$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg}(ax + b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax + b)| + C \quad (6)$$

Funkcje wymierne

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2+\gamma^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \left(\frac{ax+b}{\gamma} \right) + C \quad (8)$$

Całki z wyrażeniami pod pierwiastkiem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\gamma^2 - (ax+b)^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \left(\frac{ax+b}{\gamma} \right) + C \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)^2+k}} = \frac{1}{a} \ln \left| ax+b + \sqrt{(ax+b)^2+k} \right| + C \quad (10)$$

Funkcje hiperboliczne

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C$$

$$\int \sinh(ax+b) dx = \frac{1}{a} \cosh(ax+b) + C \quad (11)$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \cosh(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sinh(ax+b) + C \quad (12)$$

2 Wzory wraz z przykładami zastosowania

Wersja podstawowa

wzór oraz dwa zastosowania

Wersja rozszerzona

wzór oraz dwa zastosowania

Wzór ogólny

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\text{a) } \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\text{b) } \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad \uparrow (1)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int (2x+1)^2 dx &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^3}{3} + C \\ &= \frac{(2x+1)^3}{6} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int (3t-2)^3 dt &= \frac{1}{3} \cdot \frac{(3t-2)^4}{4} + C \\ &= \frac{(3t-2)^4}{12} + C \end{aligned}$$

Funkcja wykładnicza

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 3e^x dx &= 3 \int e^x dx \\ &= 3e^x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 5e^t dt &= 5 \int e^t dt \\ &= 5e^t + C \end{aligned}$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C \quad \uparrow (2)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 4e^{2x+1} dx &= 4 \cdot \frac{1}{2} e^{2x+1} + C \\ &= 2e^{2x+1} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 6e^{3t-2} dt &= 6 \cdot \frac{1}{3} e^{3t-2} + C \\ &= 2e^{3t-2} + C \end{aligned}$$

Sinus

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C \quad \uparrow (3)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 2 \sin x \, dx &= 2 \int \sin x \, dx \\ &= -2 \cos x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 3 \sin(2x + 1) \, dx &= 3 \left(-\frac{1}{2} \cos(2x + 1) \right) + C \\ &= -\frac{3}{2} \cos(2x + 1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 5 \sin t \, dt &= 5 \int \sin t \, dt \\ &= -5 \cos t + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 8 \sin(4t - 3) \, dt &= 8 \left(-\frac{1}{4} \cos(4t - 3) \right) + C \\ &= -2 \cos(4t - 3) + C \end{aligned}$$

Cosinus

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C \quad \uparrow (4)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 4 \cos x \, dx &= 4 \int \cos x \, dx \\ &= 4 \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 6 \cos(3x - 2) \, dx &= 6 \cdot \frac{1}{3} \sin(3x - 2) + C \\ &= 2 \sin(3x - 2) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 7 \cos t \, dt &= 7 \int \cos t \, dt \\ &= 7 \sin t + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 10 \cos(5t + 1) \, dt &= 10 \cdot \frac{1}{5} \sin(5t + 1) + C \\ &= 2 \sin(5t + 1) + C \end{aligned}$$

Tangens

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{tg}(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax + b)| + C \quad \uparrow (5)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 2 \operatorname{tg} x \, dx &= 2 \int \operatorname{tg} x \, dx \\ &= -2 \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 4 \operatorname{tg}(2x + 1) \, dx &= 4 \left(-\frac{1}{2} \ln |\cos(2x + 1)| \right) + C \\ &= -2 \ln |\cos(2x + 1)| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 5 \operatorname{tg} t \, dt &= 5 \int \operatorname{tg} t \, dt \\ &= -5 \ln |\cos t| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 9 \operatorname{tg}(3t - 2) \, dt &= 9 \left(-\frac{1}{3} \ln |\cos(3t - 2)| \right) + C \\ &= -3 \ln |\cos(3t - 2)| + C \end{aligned}$$

Cotangens

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg}(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax + b)| + C \quad \uparrow (6)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 3 \operatorname{ctg} x \, dx &= 3 \int \operatorname{ctg} x \, dx \\ &= 3 \ln |\sin x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 6 \operatorname{ctg}(3x + 1) \, dx &= 6 \cdot \frac{1}{3} \ln |\sin(3x + 1)| + C \\ &= 2 \ln |\sin(3x + 1)| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 4 \operatorname{ctg} t \, dt &= 4 \int \operatorname{ctg} t \, dt \\ &= 4 \ln |\sin t| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 8 \operatorname{ctg}(4t - 1) \, dt &= 8 \cdot \frac{1}{4} \ln |\sin(4t - 1)| + C \\ &= 2 \ln |\sin(4t - 1)| + C \end{aligned}$$

Całka typu $\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C \quad \uparrow (7)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{5}{x} dx &= 5 \int \frac{1}{x} dx \\ &= 5 \ln|x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{4 dx}{2x+3} &= 4 \cdot \frac{1}{2} \ln|2x+3| + C \\ &= 2 \ln|2x+3| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{3}{t} dt &= 3 \int \frac{1}{t} dt \\ &= 3 \ln|t| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{6 dt}{3t-1} &= 6 \cdot \frac{1}{3} \ln|3t-1| + C \\ &= 2 \ln|3t-1| + C \end{aligned}$$

Całka prowadząca do funkcji arctg

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^2+\gamma^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\gamma} \operatorname{arctg} \left(\frac{ax+b}{\gamma} \right) + C \quad \uparrow (8)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{5 dx}{x^2+1} &= 5 \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= 5 \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{dx}{(2x+3)^2+9} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+3}{3} \right) + C \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+3}{3} \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{2 dt}{t^2+1} &= 2 \int \frac{dt}{t^2+1} \\ &= 2 \operatorname{arctg} t + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{dt}{(3t-1)^2+4} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{3t-1}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{3t-1}{2} \right) + C \end{aligned}$$

Całka prowadząca do funkcji arcsin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\gamma^2 - (ax+b)^2}} = \frac{1}{a} \arcsin \left(\frac{ax+b}{\gamma} \right) + C \quad \uparrow (9)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{3dx}{\sqrt{1-x^2}} &= 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 3 \arcsin x + C \end{aligned}$$

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{9-(2x+1)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{2x+1}{3} \right) + C$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int \frac{5dt}{\sqrt{1-t^2}} &= 5 \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= 5 \arcsin t + C \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{dt}{\sqrt{16-(4t-3)^2}} = \frac{1}{4} \arcsin \left(\frac{4t-3}{4} \right) + C$$

Całka z pierwiastkiem typu $\sqrt{x^2+k}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+k} \right| + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)^2+k}} &= \\ \frac{1}{a} \ln \left| ax+b + \sqrt{(ax+b)^2+k} \right| &+ C \quad \uparrow (10) \end{aligned}$$

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+4} \right| + C$$

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}} = \frac{1}{2} \ln \left| 2x+1 + \sqrt{(2x+1)^2+4} \right| + C$$

$$\text{b) } \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+9}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2+9} \right| + C$$

$$\text{b) } \int \frac{dt}{\sqrt{(3t-2)^2+9}} = \frac{1}{3} \ln \left| 3t-2 + \sqrt{(3t-2)^2+9} \right| + C$$

Sinus hiperboliczny

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x + C$$

$$\int \sinh(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \cosh(ax + b) + C \quad \uparrow (11)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 2 \sinh x \, dx &= 2 \int \sinh x \, dx \\ &= 2 \cosh x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 4 \sinh(2x + 1) \, dx &= 4 \cdot \frac{1}{2} \cosh(2x + 1) + C \\ &= 2 \cosh(2x + 1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 5 \sinh t \, dt &= 5 \int \sinh t \, dt \\ &= 5 \cosh t + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 9 \sinh(3t - 2) \, dt &= 9 \cdot \frac{1}{3} \cosh(3t - 2) + C \\ &= 3 \cosh(3t - 2) + C \end{aligned}$$

Cosinus hiperboliczny

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x + C$$

$$\int \cosh(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sinh(ax + b) + C \quad \uparrow (12)$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 3 \cosh x \, dx &= 3 \int \cosh x \, dx \\ &= 3 \sinh x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 6 \cosh(3x - 1) \, dx &= 6 \cdot \frac{1}{3} \sinh(3x - 1) + C \\ &= 2 \sinh(3x - 1) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 4 \cosh t \, dt &= 4 \int \cosh t \, dt \\ &= 4 \sinh t + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int 8 \cosh(4t + 1) \, dt &= 8 \cdot \frac{1}{4} \sinh(4t + 1) + C \\ &= 2 \sinh(4t + 1) + C \end{aligned}$$