

Spis treści

$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$	str. 2	$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	str. 13
$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	str. 6	$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	str. 17
$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	str. 7	$A_7 = \begin{pmatrix} 9 & 37 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	str. 18
$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	str. 8	$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = A_3$	str. 20

A_5 : przypadek, w którym występuje mniej różnych wartości własnych niż wynosi stopień macierzy, a mimo to macierz da się zdiagonalizować.

A_6 : przypadek, w którym macierzy nie da się zdiagonalizować.

A_7 : zespolone wartości własne.

A_8 : diagonalizacja wykorzystująca własności macierzy symetrycznej i ortogonalność wektorów własnych.

1. Macierz A_1 : wartości własne i schemat postępowania

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wielomian charakterystyczny:

$$\begin{aligned} p_{A_1}(\lambda) &= \det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 5 \\ 6 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 30 \\ &= 2 + 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 30 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda - 28. \end{aligned}$$

Równanie charakterystyczne:

$$\lambda^2 + 3\lambda - 28 = 0.$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 9 + 112 = 121 = 11^2,$$

$$\lambda_1 = \frac{-3 - 11}{2} = -7, \quad \lambda_2 = \frac{-3 + 11}{2} = 4.$$

Zatem

$$\begin{aligned} p_{A_1}(\lambda) &= (\lambda - 4)(\lambda + 7), \quad \text{Spec}(A_1) = \{4, -7\}, \\ \mu(4) &= 1, \quad \mu(-7) = 1, \end{aligned}$$

gdzie $\mu(\lambda)$ oznacza krotność algebraiczną wartości własnej.

Schemat diagonalizacji:

1. wyznaczyć $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$,
2. znaleźć wszystkie miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego,
3. zapisać spektrum $\text{Spec}(A)$,
4. dla każdej wartości własnej λ_i rozwiązać równanie

$$A\vec{v} = \lambda_i\vec{v},$$

5. wyznaczyć przestrzeń własną i jej bazę,
6. jeżeli uda się znaleźć dostatecznie dużo liniowo niezależnych wektorów własnych, zbudować

$$A = PDP^{-1}.$$

2. Macierz A_1 : przestrzeń własna dla $\lambda = 4$

Rozwiązujemy równanie

$$A_1 \vec{v} = 4\vec{v}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

co daje

$$\begin{cases} -2x + 5y = 4x, \\ 6x - y = 4y, \end{cases} \iff \begin{cases} -6x + 5y = 0, \\ 6x - 5y = 0. \end{cases}$$

Metodą Gaussa:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 5 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Niech $y = \alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$x = \frac{5}{6}\alpha,$$

a więc

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6}\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$V_{\lambda=4} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$B_{V_{\lambda=4}} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma(4) = \dim V_{\lambda=4} = 1.$$

Wymiar przestrzeni własnej, czyli liczba wektorów w jej bazie, to **krotność geometryczna** $\gamma(\lambda)$.

3. Macierz A_1 : przestrzeń własna dla $\lambda = -7$

$$A_1 \vec{v} = -7\vec{v}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} -2x + 5y = -7x, \\ 6x - y = -7y, \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + 5y = 0, \\ 6x + 6y = 0. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Niech $y = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy $x = -\alpha$, czyli

$$\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$V_{\lambda=-7} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_{V_{\lambda=-7}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma(-7) = 1.$$

4. Macierz A_1 : diagonalizacja

Mamy wszystkie wartości własne i odpowiadające im wektory własne. Wymiar macierzy A_1 wynosi 2 i znaleźliśmy dwa liniowo niezależne wektory własne, więc macierz jest diagonalizowalna.

$$A_1 = PDP^{-1}.$$

Macierz P powstaje z wektorów własnych zapisanych pionowo jako kolumny:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Macierz D jest diagonalna i zawiera wartości własne w tej samej kolejności, w której odpowiadające im wektory własne zapisano w P :

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ta postać pozwala łatwo potęgować macierz, na przykład

$$A_1^{100} = PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{100} & 0 \\ 0 & (-7)^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

5. Macierz A_2

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$p_{A_2}(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2),$$

więc

$$\text{Spec}(A_2) = \{3, 2\}, \quad \mu(3) = \mu(2) = 1.$$

Dla $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x - y = 0, \\ 2x + y = 0, \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Zatem, przy $y = \alpha$,

$$x = -\frac{1}{2}\alpha, \quad V_{\lambda=3} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dla $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x - y = 0, \\ 2x + 2y = 0, \end{cases}$$

więc

$$V_{\lambda=2} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Diagonalizacja:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

6. Macierz A_3

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$p_{A_3}(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3),$$

$$\text{Spec}(A_3) = \{2, -3\}, \quad \mu(2) = \mu(-3) = 1.$$

Dla $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} x + 2y = 2x, \\ 2x - 2y = 2y, \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y = 0, \\ 2x - 4y = 0, \end{cases}$$

więc

$$x = 2\alpha, \quad y = \alpha, \quad V_{\lambda=2} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dla $\lambda = -3$:

$$\begin{cases} x + 2y = -3x, \\ 2x - 2y = -3y, \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y = 0, \\ 2x + y = 0, \end{cases}$$

więc

$$x = -\frac{1}{2}\alpha, \quad y = \alpha, \quad V_{\lambda=-3} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Diagonalizacja:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

7. Macierz A_4 : wielomian charakterystyczny

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} p_{A_4}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)[(-2-\lambda)(1-\lambda) - 1] - 3(3 - 3\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 3) - 9(1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 12) \\ &= (1-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 4). \end{aligned}$$

Zatem

$$\text{Spec}(A_4) = \{3, 1, -4\}, \quad \mu(3) = \mu(1) = \mu(-4) = 1.$$

8. Macierz A_4 : przestrzeń własna dla $\lambda = 3$

$$A_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x + 3y = 3x, \\ 3x - 2y - z = 3y, \\ -y + z = 3z, \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 3y = 0, \\ 3x - 5y - z = 0, \\ -y - 2z = 0. \end{cases}$$

Jedną z możliwych redukcji Gaussa:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Stąd

$$x = -3\alpha, \quad y = -2\alpha, \quad z = \alpha,$$

więc

$$V_{\lambda=3} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_{V_{\lambda=3}} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma(3) = 1.$$

9. Macierz A_4 : przestrzeń własna dla $\lambda = 1$

$$A_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x + 3y = x, \\ 3x - 2y - z = y, \\ -y + z = z, \end{cases} \iff \begin{cases} 3y = 0, \\ 3x - 3y - z = 0, \\ -y = 0. \end{cases}$$

Po redukcji:

$$y = 0, \quad z = 3x.$$

Przyjmując $z = \alpha$, otrzymujemy

$$x = \frac{1}{3}\alpha, \quad y = 0, \quad z = \alpha.$$

$$V_{\lambda=1} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_{V_{\lambda=1}} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma(1) = 1.$$

10. Macierz A_4 : przestrzeń własna dla $\lambda = -4$

$$A_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x + 3y = -4x, \\ 3x - 2y - z = -4y, \\ -y + z = -4z, \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + 3y = 0, \\ 3x + 2y - z = 0, \\ -y + 5z = 0. \end{cases}$$

Po redukcji Gaussa otrzymujemy zależności

$$x = -3\alpha, \quad y = 5\alpha, \quad z = \alpha.$$

$$V_{\lambda=-4} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_{V_{\lambda=-4}} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma(-4) = 1.$$

11. Macierz A_4 : diagonalizacja

Zebrane przestrzenie własne:

$$V_{\lambda=3} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{\lambda=1} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{\lambda=-4} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Macierz wektorów własnych:

$$P = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{3} & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

a odpowiadająca jej macierz diagonalna:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{3} & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{3} & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

12. Macierz A_5 : powtarzająca się wartość własna

$$A_5 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} p_{A_5}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda-1)(2-\lambda+1) \\ &= (3-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-3)^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$\text{Spec}(A_5) = \{3, 3, 1\}, \quad \mu(3) = 2, \quad \mu(1) = 1.$$

Krytyczna własność dotycząca diagonalizacji:

jeżeli macierz $n \times n$ ma n różnych wartości własnych, to jest diagonalizowalna.

Jest to implikacja tylko w jedną stronę. Jeżeli różnych wartości własnych jest mniej niż n , nie wiadomo jeszcze, czy macierz jest diagonalizowalna. Trzeba sprawdzić liczbę liniowo niezależnych wektorów własnych.

13. Macierz A_5 : przestrzeń własna dla $\lambda = 3$

Wartość własna $\lambda = 3$ ma krotność algebraiczną $\mu(3) = 2$.

$$A_5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 3x = 3x, \\ x + 2y - z = 3y, \\ x - y + 2z = 3z, \end{cases} \iff x - y - z = 0.$$

Zatem

$$x = y + z.$$

Niech

$$y = \alpha, \quad z = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Wtedy

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$V_{\lambda=3} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$B_{V_{\lambda=3}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma(3) = 2.$$

Mimo że wartość własna 3 jest dwukrotna, udało się znaleźć dwa liniowo niezależne wektory własne.

14. Macierz A_5 : przestrzeń własna dla $\lambda = 1$

$$A_5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 3x = x, \\ x + 2y - z = y, \\ x - y + 2z = z, \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0, \\ x + y - z = 0, \\ x - y + z = 0. \end{cases}$$

Stąd

$$x = 0, \quad y = z.$$

Niech $y = z = \alpha$. Otrzymujemy

$$\vec{v} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$V_{\lambda=1} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma(1) = 1.$$

15. Macierz A_5 : diagonalizacja

Mamy bazowe wektory własne

$$V_{\lambda=3} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad V_{\lambda=1} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zatem

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Do macierzy P wpisujemy wszystkie znalezione bazowe, liniowo niezależne wektory własne. W macierzy D każdej kolumnie macierzy P odpowiada jej wartość własna, więc wartość 3 pojawia się na przekątnej dwa razy.

16. Macierz A_6 : przykład niediagonalizowalny

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$p_{A_6}(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

więc

$$\text{Spec}(A_6) = \{1, 1\}, \quad \mu(1) = 2.$$

Dla $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y = x, \\ y = y, \end{cases}$$

czyli

$$y = 0, \quad x = \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$V_{\lambda=1} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \gamma(1) = 1.$$

Jedyny liniowo niezależny wektor własny nie wystarcza do diagonalizacji macierzy 2×2 . Brakuje drugiego liniowo niezależnego wektora własnego.

Macierz A_6 nie jest diagonalizowalna.

17. Macierz A_7 : zespolone wartości własne

$$A_7 = \begin{pmatrix} 9 & 37 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} p_{A_7}(\lambda) &= \lambda^2 - 6\lambda + 10 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 1 \\ &= (\lambda - 3)^2 - i^2 \\ &= (\lambda - 3 - i)(\lambda - 3 + i). \end{aligned}$$

Zatem

$$\lambda_1 = 3 + i, \quad \lambda_2 = 3 - i, \quad \text{Spec}(A_7) = \{3 + i, 3 - i\} \subset \mathbb{C}.$$

Dla $\lambda = 3 + i$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 37 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3 + i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

co daje

$$\begin{cases} (6 - i)x + 37y = 0, \\ -x + (-6 - i)y = 0. \end{cases}$$

Stąd

$$x = (-6 - i)\alpha, \quad y = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$$V_{\lambda=3+i} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -6 - i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

18. Macierz A_7 : druga przestrzeń własna i diagonalizacja nad $\mathbb{C}$

Dla $\lambda = 3 - i$:

$$\begin{pmatrix} 9 & 37 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3 - i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

co prowadzi do układu

$$\begin{cases} (6 + i)x + 37y = 0, \\ -x + (-6 + i)y = 0. \end{cases}$$

Zatem

$$x = (-6 + i)\alpha, \quad y = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

więc

$$V_{\lambda=3-i} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -6 + i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Macierz A_7 diagonalizujemy nad ciałem liczb zespolonych:

$$P = \begin{pmatrix} -6 - i & -6 + i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 + i & 0 \\ 0 & 3 - i \end{pmatrix}.$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} -6 - i & -6 + i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 + i & 0 \\ 0 & 3 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 - i & -6 + i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

19. Macierze symetryczne i ortogonalność wektorów własnych

Dla macierzy symetrycznej zachodzi

$$A^T = A.$$

Wektory własne odpowiadające **różnym** wartościom własnym są ortogonalne.

Dla wektora

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

wektory prostopadłe o tej samej długości można zapisać w postaci

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}.$$

Rzeczywiście,

$$\vec{u} \cdot \vec{w}_1 = a(-b) + ba = 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{w}_2 = ab - ba = 0.$$

Ta własność przyspiesza diagonalizację symetrycznych macierzy 2×2 .

Dla przykładu ponownie rozważmy

$$A_8 = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Mamy

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2),$$

więc

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2.$$

Dla $\lambda = -3$ można przyjąć

$$V_{\lambda=-3} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wektor ortogonalny można od razu wybrać jako

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

co odpowiada wartości własnej $\lambda = 2$:

$$V_{\lambda=2} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Zatem

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

co daje

$$A_8 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}.$$