

Własności operacji na macierzach

Tomasz Suchta • Filip Dynakowski

deltakwadrat.pl

Dodawanie macierzy

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

$$A + B = B + A$$

$$A + 0 = 0 + A = A$$

$$A + (-A) = 0$$

Transpozycja

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(A \circ B)^T = B^T \circ A^T$$

$$(A^T)^T = A$$

Mnożenie macierzy przez skalar

Dla skalarów α, β :

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(A + B)\alpha = A\alpha + B\alpha$$

$$\alpha(A \circ B) = (\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B)$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

$$1A = A$$

Ślad macierzy

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr } A + \text{tr } B$$

$$\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr } A$$

$$\text{tr}(A^T) = \text{tr } A$$

$$\text{tr}(A \circ B) = \text{tr}(B \circ A)$$

Mnożenie macierzy

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C) = A \circ B \circ C$$

Mnożenie macierzy nie jest na ogół przemienne:

$$\exists A, B : \quad A \circ B \neq B \circ A$$

Możliwe jest również:

$$\exists A, B \neq 0 : \quad A \circ B = 0$$

Dla macierzy jednostkowej:

$$A \circ I = I \circ A = A$$

Rozdzielność względem dodawania:

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C$$

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C$$

Macierz odwrotna

Dla macierzy odwracalnej A :

$$A^{-1} \circ A = A \circ A^{-1} = I$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Dla odwracalnych macierzy A i B :

$$(A \circ B)^{-1} = B^{-1} \circ A^{-1}$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$$

Dla $\alpha \neq 0$:

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$$

Szczególne rodzaje macierzy

Macierz jednostkowa

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz symetryczna

$$A = A^T$$

Macierz antysymetryczna

$$A = -A^T$$

Macierz ortogonalna

$$Q^T = Q^{-1}$$

Macierz diagonalna

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Macierz osobliwa

$$\det A = 0$$

Macierz trójkątna górna

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$$

Wyznacznik macierzy odwrotnej

Dla $\det A \neq 0$:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$