

Spis treści:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{str } 2$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{str } 6$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{str } 7$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{str } 8$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{str } 13$$

Przypadek w którym będzie mniej wartości własnych, a i tak uda się zdiagnozować macierz.

$$A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{str } 17$$

Przypadek, w którym nie da się zdiagnozować.

$$A_7 = \begin{bmatrix} 9 & 37 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{str } 18$$

Zespolone wartości własne.

$$A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = A_3 \quad \text{str } 20$$

Diagonalizacja wykorzystując własności macierzy symetrycznej i wektorów ortogonalnych.

I. $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

Wielomian-Charakterystyczny

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

równanie względem λ (niewiadomą jest wartość własna λ)

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (-2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) - 5 \cdot 6 = 0 \\ &= 2 + 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 30 = 0 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda - 28 = 0 \end{aligned}$$

Równanie-Charakterystyczne
Rozwiązujemy jak umiemy.

$$= 1(\lambda - 4)^1 (\lambda + 7)^1$$

krotności algebraiczne wartości własnych

$$\begin{aligned} \mu(4) &= 1 \\ \mu(-7) &= 1 \end{aligned}$$

Spektrum macierzy A
(jest to zbiór wartości własnych)

$$\text{Spec}(A) = \{4, -7\}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = \\ &= 9 + 4(20+8) \\ &= 9 + 80 + 32 \\ &= 121 = 11^2 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{-3 - 11}{2} = -7 = \lambda$$

Wartości Własne

$$\lambda = \frac{-3 + 11}{2} = 4 = \lambda$$

znaleźć wzór na wielomian
charakterystyczny licząc wyznacznik:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & & \\ & b-\lambda & \\ & & \ddots \end{vmatrix}$$



$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \dots$$

Znaleźć wartości własne,
czyli miejsca zerowe wielomianu
charakterystycznego

Zapisać spektrum

$$\text{Spec } A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

$$\lambda_1 =$$

dla każdej wartości własnej z osobna,
trzeba podstawić ją do równania:

$$A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

i rozwiązać względem wektora. Ma mieć tyle współrzędnych
ile wynosi stopień macierzy

Rozwiązując metodą gaussa i doprowadzając do postaci
schodkowej kanonicznej otrzymujemy wektory własne.

Dla każdego wektora własnego można zapisać przestrzeń własną

Na koniec zapisać macierz w postaci równania

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

dla $\lambda = 4$ $A \cdot \vec{v} = 4 \cdot \vec{v}$

Równanie względem wektora własnego v

Ma ten sam wymiar co macierz

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x + 5y \\ 6x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 5y = 4x \\ 6x - y = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} -6x + 5y = 0 \\ 6x - 5y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -6 & 5 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{wz. } w_1: \text{zawsze jakiś wiersz się zeruje}$$

I Można zawsze doprowadzać metodą Gaussa, do postaci schodkowej kanonicznej.

II Niewiadome, które są "schowane" za jedynką z lewej strony, parametryzujemy

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{cases} x = \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

III

Po zamianie 'y' na parametr 'α' wstawiamy parametr w równanie i wyznaczamy 'x' traktując 'α' jak liczbę.

$$1x - \frac{5}{6}\alpha = 0 \rightarrow x = \frac{5}{6}\alpha$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{6}\alpha \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zatem ogólna struktura wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda=4$ to przeskalowywanie wektora $[5/6; 1]$

$$V_{\lambda=4} = \left\{ \alpha \cdot \begin{bmatrix} 5/6 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$V_{\lambda=4} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Przestrzeń własna dla $\lambda=4$
Czyli zbiór wszystkich wektorów powstałych jako kombinacja liniowa (czyli w tym wypadku samo skalowanie) wektorów bazowych

$$B_{V_{\lambda=4}} = \left\{ \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Baza ów przestrzeni własnej.
Jej elementy to wektory własne

$$\dim V_{\lambda=4} = |B_{V_{\lambda=4}}| = 1$$

Wymiar przestrzeni własnej to ilość elementów w bazie własnej, czyli 1.
Jest to również krotność geometryczna.

$$\gamma(4) = 1$$

$$\text{dla } \lambda = -7 \quad A \cdot \vec{v} = -7 \cdot \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -7 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 5y = -7x \\ 6x - y = -7y \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & | & 0 \\ 6 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{:5 \\ :6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_2 - w_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

param.

$$\begin{cases} x = \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Wtedy $1x + 1\alpha = 0$

$x = -\alpha$

$$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda = -7$

$$V_{\lambda=-7} = \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V_{\lambda=-7} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

przestrzeń własna

$$B_{V_{\lambda=-7}} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

baza przestrzeni własnej

$$\gamma(-7) = \dim V_{\lambda=-7} = |B_{V_{\lambda=-7}}| = 1$$

krotność geometryczna, czyli wymiar przestrzeni własnej, czyli ilość elementów w bazie

Mając wszystkie wartości własne i im odpowiadające wektory własne, możemy przejść do diagonalizacji

Wymiar macierzy A jest 2, a udało się znaleźć dwa różne wektory własne bazowe; można zatem wykonać diagonalizację A.

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

P to macierz stworzona z wektorów własnych zapisanych pionowo, w dowolnej kolejności.

$$P = \begin{bmatrix} 5/6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D to macierz diagonalna (czyli mająca wszędzie zera, poza diagonalą), której elementy na diagonalu to wartości własne. W TEJ SAMEJ kolejności w której zostały zapisane wektory własne w macierzy P

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda=4} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda=-7} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Zatem diagonalizacja A to:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5/6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5/6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

To jest wynik i odpowiedź.

Mając tą postać, można przejść do wielu zastosowań, na przykład potęgowania

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4^{100} & 0 \\ 0 & (-7)^{100} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5/6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 1(\lambda - 3)^1(\lambda - 2)^1$$

Można znaleźć miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego "delta", będę jednak tego unikać. Wykorzystam własność wielomianów, która mówi, że całkowite miejsca zerowe muszą być dzielnikami wyrazu wolnego, i na tej podstawie spróbuję zgadnąć miejsce zerowe, a po podstawieniu sprawdzić czy trafiłem

$$p_A(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$$

$$\lambda = 2$$

$$\mu(2) = 1$$

$$\lambda = 3$$

$$\mu(3) = 1$$

Po znalezieniu jednego miejsca zerowego można wzorem Viete'a znaleźć od razu drugie:

$$(x_1 \cdot x_2 = c) \quad 2 \cdot \lambda_2 = \frac{6}{1}$$

$$\lambda = 3: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{Spec } A = \{3, 2\}$$

$$\begin{cases} x - y = 3x \\ 2x + 4y = 3y \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$1x - \frac{1}{2}y = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}y$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \bigvee_{\lambda=3} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 2: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$1x + 1y = 0 \rightarrow x = -y$$

$$\begin{cases} x - y = 2x \\ 2x + 4y = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \bigvee_{\lambda=2} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 1(\lambda - 2)^1(\lambda + 3)^1$$

$$p(2) = 4 + 2 - 6 = 0$$

$$\lambda = 2$$

$$2 \cdot \lambda_2 = -6$$

$$\lambda = -3$$

$$\text{Spec } A = \{2, -3\}$$

$$\mu(2) = 1$$

$$\gamma(2) = 1$$

$$\mu(-3) = 1$$

$$\gamma(-3) = 1$$

$$A_3 = P D P^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\lambda = 2: \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 2x \\ 2x - 2y = 2y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V_{\lambda=2} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = -3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -3x \\ 2x - 2y = -3y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V_{\lambda=-3} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0 =$$

Trzeba obliczyć wyznacznik jakimś sposobem.
Będę rozwijał pierwszy wiersz metodą Laplace'a

$$= (1-\lambda) [(-2-\lambda)(1-\lambda) - 1] - 3(3 - 3\lambda) = 0$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 1\lambda - 2 - 1) - 9(1-\lambda) = 0$$

$$= (1-\lambda) [\lambda^2 + \lambda - 3 - 9] = 0$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 12) = 0$$

$$(-4)^2 - 4 - 12 = 0 \quad \lambda = -4$$

$$-4 \cdot \lambda = -12 \quad \lambda = 3$$

$$p(\lambda) = -(\lambda-3)^1 (\lambda-1)^1 (\lambda+4)^1$$

$$\text{Spec } A = \{3, 1, -4\}$$

$$\begin{aligned} \mu(3) &= 1 \\ \mu(1) &= 1 \\ \mu(-4) &= 1 \end{aligned}$$

$$\lambda = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 3x \\ 3x - 2y - z = 3y \\ -y + z = 3z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 3 & -5 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{!}:(-1)]{w_2 + w_1} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 0 \\ -2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_2 + 2w_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{w_3 + w_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot \end{pmatrix} \xrightarrow{w_1 + 2w_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot \end{pmatrix} \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

param.

$$B_{\lambda=3} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma(3) = \dim V_{\lambda=3} = |B_{\lambda=3}| = 1$$

$$V_{\lambda=3} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y = x \\ 3x - 2y - z = y \\ -y + z = z \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} :3 \\ :3 \sim \\ :(-1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} w_2 + v_1 \\ w_3 - v_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$w_1 \leftrightarrow w_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$$

para

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V_{\lambda=1} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma(1) = \dim V_{\lambda=1} = |B_{\lambda=1}| = 1$$

$$\lambda = -4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -4 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 3y = -4x \\ 3x - 2y - z = -4y \\ -y + z = -4z \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} w_1 - 2w_2 \\ 1: (-1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{w_2 + 3w_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{array} \right) \sim \begin{array}{l} 1: (-1) \\ w_3 + w_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim w_1 + w_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ - & - & \cdot & \cdot \end{array} \right) \begin{cases} x = -3\alpha \\ y = 5\alpha \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \quad V_{\lambda=-4} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{\lambda=-4} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma(-4) = \dim V_{\lambda=-4} = |B_{\lambda=-4}| = 1$$

Diagonalizacja:

$$A_4 = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$$V_{\lambda=3} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda=1} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda=-4} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1/3 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1/3 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda) \left[\underbrace{(2-\lambda)^2}_{a^2} - \underbrace{1^2}_{b^2} \right] = (3-\lambda) (\underbrace{2-\lambda-1}_a) (\underbrace{2-\lambda+1}_{a+b})$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

$$\text{Spec } A = \{3, 3, 1\}$$

Są różne sposoby zapisu spektrum macierzy.
W niektórych wersjach spektrum to po prostu zbiór wartości własnych.
W innych dodatkowo dodaje się kolejność (np od największej), i/lub krotności.
Istotą jest zapisanie jakoś informacji o wartościach własnych.
Zapisałem 3 dwukrotnie, ponieważ ma krotność dwa (krotność algebraiczną), uznałem to za istotną informację, ponadto jest to 'legalny' zapis z perspektywy aksjomatów logiki i teorii mnogości (aksjomat ekstensjonalności).
Na egzaminie warto zapisać tak jak egzaminator lubi.

Krytyczna własność mówiąca o możliwości diagonalizacji:

$A_{n \times n}$ ma n RÓŻNYCH wartości własnych $\rightarrow$ jest diagonalizowalna

Jest to implikacja w tylko jedną stronę!
Oznacza to że jeśli macierz ma mniej różnych wartości własnych (czyli jakaś krotność algebraiczna jest ściśle większa od 1), to NIEWIADOMO czy da się zdiagnozować, czy nie. Czasami się da, czasami nie.
Procedura jest taka sama. Jak się uda, to się da. Jeśli będzie za to za mało wektorów własnych bazowych (LINIOWO NIEZALEŻNYCH!), wtedy się nie da.

$$\lambda = 3 \quad \mu(3) = 2 \quad \nabla$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x = 3x \\ x + 2y - z = 3y \\ x - y + 2z = 3z \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim w_2 - w_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & - \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha \in \mathbb{R} \\ z = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zatem ogólna struktura wektorów własnych odpowiadających wartości własnej $\lambda=3$, to dodawanie i skalowanie dwóch wektorów (czyli ich kombinacja liniowa). Znajdowanie ów wektorów metodą Gaussa+Postaci Schodkowej Kanonicznej, zawsze daje w ten sposób wektory liniowo niezależne!

Pomimo tego, że wartość własna 3 była dwukrotna, to i tak udało się znaleźć aż dwa wektory własne liniowo niezależne.

$$V_{\lambda=3} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{\lambda=3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma(3) = \dim V_{\lambda=3} = |B_{\lambda=3}| = 2$$

$$\lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x = x \\ x + 2y - z = y \\ x - y + 2z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} | :2 \\ \\ w_3 - w_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ w_2 - w_1 \\ | : (-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & | & \cdot \end{pmatrix}$$

param.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$V_{\lambda=1} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \right\}$$

$$\gamma(1) = \dim V_{\lambda=1} = 1$$

$$V_{\lambda=3} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{\lambda=1} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Diagonalizacja

$$A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$


Do macierzy P wpisujemy wszystkie wektory własne bazowe (liniowo niezależne) jakie mamy, każdemu z takich wektorów odpowiada ta sama wartość własna, i ją wpisujemy macierzy diagonalnej (kilka razy)

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

$$\mu(1) = 2$$

$$\text{Spec } A = \{1, 1\}$$

Jest mniej miejsc zerowych wielomianu charakterystycznego (wartości własnych), niż wynosi stopień macierzy (2). Zatem, niewiadomo czy można wykonać diagonalizację.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + y = x \\ y = y \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = \lambda \in \mathbb{R} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$V_{\lambda=1} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\gamma(1) = \dim V_{\lambda=1} = 1$$

Jedyny wektor własny liniowo niezależny jaki udało się uzyskać nie wystarcza do diagonalizacji. Brakuje jednego wektora.

x jest parametrem, ponieważ wracając do pierwotnej interpretacji układu równań, okazuje się, że dowolna liczba podstawiona za 'x' daje prawdę układu równań. Zatem dowolna liczba rzeczywista może być 'x'

Zatem, ta macierz NIE jest diagonalizowalna.

$$A_7 = \begin{pmatrix} 9 & 37 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 + 1$$

$$= (\lambda - 3)^2 - i^2$$

$$= (\lambda - 3 - i)(\lambda - 3 + i)$$

$$\lambda - 3 - i = 0 \quad \vee \quad \lambda - 3 + i = 0$$

$$\lambda = 3 + i$$

$$\vee \lambda = 3 - i$$

$$\text{Spec } A = \{3 + i, 3 - i\} \subset \mathbb{C}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$-i^2 = +1$$

$$\lambda = 3 + i \quad \begin{pmatrix} 9 & 37 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3 + i) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 9x + 37y = (3 + i)x \\ -x - 3y = (3 + i)y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(6 - i) + 37y = 0 \\ -x + y(-6 - i) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6-i & 37 & 0 \\ -1 & -6-i & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\omega_1 + 6\omega_2} \left(\begin{array}{cc|c} -i & 1-6i & 0 \\ -1 & -6-i & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} | \cdot (i) \\ | : (-1) \end{matrix}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} +1 & i+6 & 0 \\ 1 & i+6 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$x = (-6 - i) \cdot \alpha$$

$$y = \alpha \in \boxed{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$$

$$\vee_{\lambda=3+i} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} -6-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 3-i \quad \begin{pmatrix} 8 & 37 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (3-i) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8x + 37y = (3-i)x \\ -x - 3y = (3-i)y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(6+i) + 37y = 0 \\ -x + y(-6+i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 6+i & 37 & | & 0 \\ -1 & -6+i & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\omega_1 + 6\omega_2} \begin{pmatrix} i & 1+6i & | & 0 \\ -1 & -6+i & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{!:(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & i-6 & | & 0 \\ 1 & 6-i & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\omega_2 + \omega_1} \begin{pmatrix} -1 & -6+i & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6-i & | & 0 \\ - & - & | & - \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = (-6+i)\alpha \\ y = \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{cases}$$

$$V_{\lambda=3-i} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} -6+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Diagonalizacja:

$$A_7 = \begin{pmatrix} 8 & 37 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -6-i & \\ & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6+i & \\ & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3+i & 0 \\ 0 & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6-i & \\ & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

DLA MACIERZY SYMETRYCZNYCH:
wektory własne z różnych przestrzeni własnych są ortogonalne (prostopadłe)

Ponadto, mając macierz 2x2 i dzięki temu wektory własne o dwóch współrzędnych, można zastosować własność:

$$A \text{ sym.} \Leftrightarrow A' = A$$

$$\text{np } \begin{bmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

wtedy dwa wektory ortogonalne i o tej samej długości mają postać:

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$$

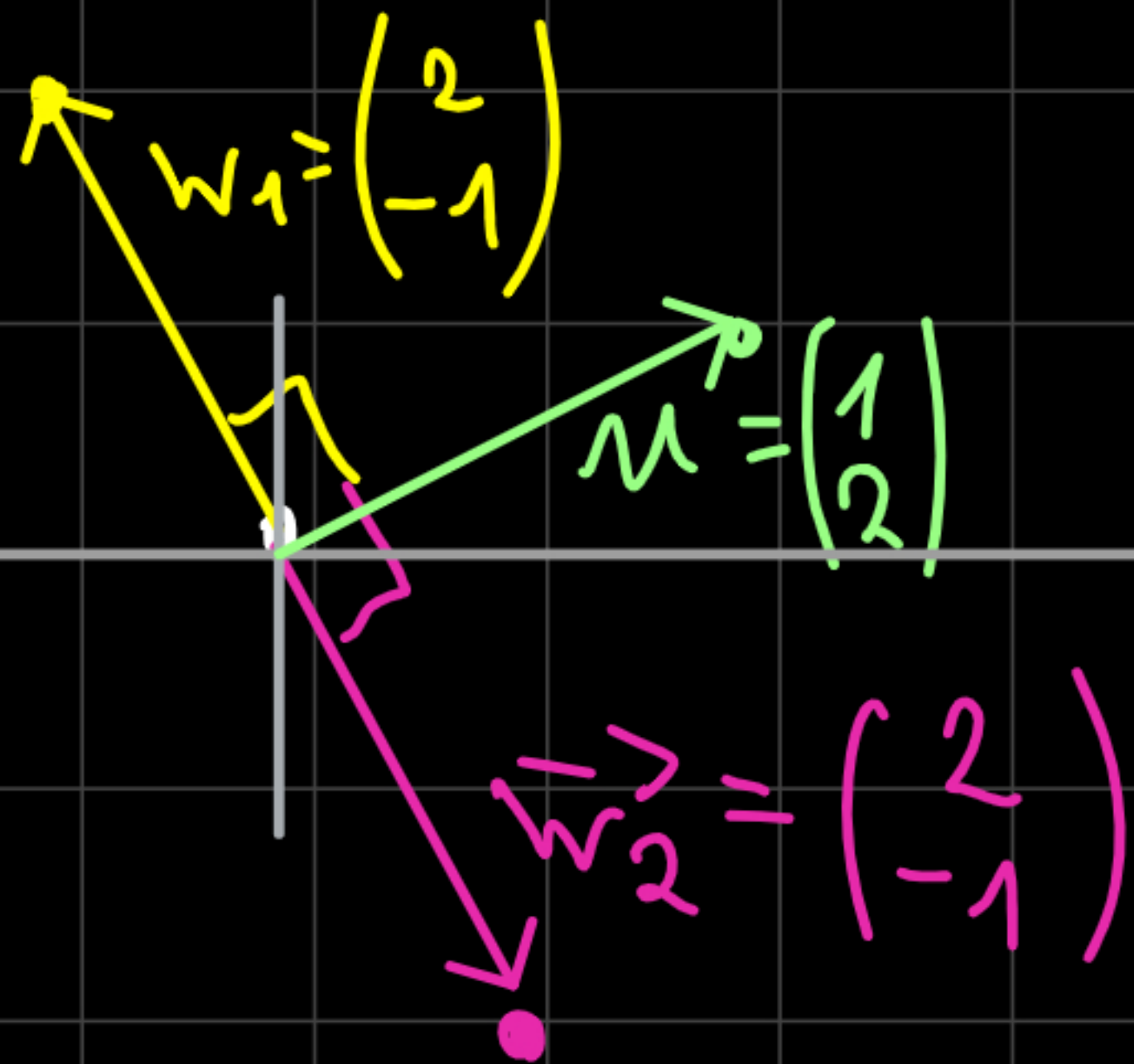
$$\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie:

$$\vec{u} \cdot \vec{w}_1 = a \cdot (-b) + b(a) = -ab + ab = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{w}_1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w}_2 = ab - ba = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w}_2$$

Ta własność jeszcze bardziej przyspiesza diagonalizację symetrycznych macierzy 2x2



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = 1(\lambda + 3)^1(\lambda - 2)^1$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \lambda = 2$$

$$2 \cdot \lambda = -6 \quad \lambda = -3$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\lambda = -3 \begin{cases} x + 2y = -3x \\ 2x - 2y = -3y \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

$$\sqrt{\lambda = -3} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\sqrt{\lambda = 2} = \lim \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ +\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$